Progresii aritmetice. Progresii geometrice
Funcția de gradul I
Funcția de gradul II
Numere complexe

Progresii aritmetice

Definiție. Se numește ***progresie aritmetică*** un șir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$, pentru care $a_n = a_{n-1} + r, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

a_1 se numește ***primul termen***, a_n este ***termenul general***, iar r se numește ***rația*** progresiei aritmetice.

Proprietăți

- Dacă $r > 0$, șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.
- Dacă $r < 0$, șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.
- $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.
- $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Progresii geometrice

Definiție. Se numește ***progresie geometrică*** un șir de numere reale $(b_n)_{n\geq 1}$, pentru care $b_n = b_{n-1} \cdot q, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

b_1 se numește ***primul termen***, b_n este ***termenul general***, iar q se numește ***rația*** progresiei geometrice.

Proprietăți

- Dacă $q > 0$, toți termenii șirului $(b_n)_{n\geq 1}$ au același semn cu b_1.
- Dacă $q < 0$, semnele termenilor șirului $(b_n)_{n\geq 1}$ alternează.
- Dacă $q = 1$, șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este constant egal cu b_1.
- $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}, \quad (\forall) n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.
- $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = \begin{cases} b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & q \neq 1 \\ n \cdot b_1, & q = 1 \end{cases}$.

Funcția de gradul I

Definiția 1. Se numește ***funcție de gradul I***, o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=a\cdot x+b,\quad a,b\in\mathbb{R},\quad a\neq 0.$

Mulțimea $G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, y=f(x)\}$ se numește ***graficul funcției*** f.

Definiția 2. Se numește ***ecuație de gradul I*** expresia de forma $a\cdot x+b=0,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

Valoarea $x=-\dfrac{b}{a}$ este ***soluția*** ecuației.

Reprezentarea grafică a funcției de gradul I

G_f este o ***dreaptă*** unic determinată de două puncte distincte, fie acestea punctele de intersecție cu cele două axe de coordonate.

$\cap Ox \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow a\cdot x+b=0 \Rightarrow \quad A\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$

$\cap Oy \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow \quad B(0,b)$

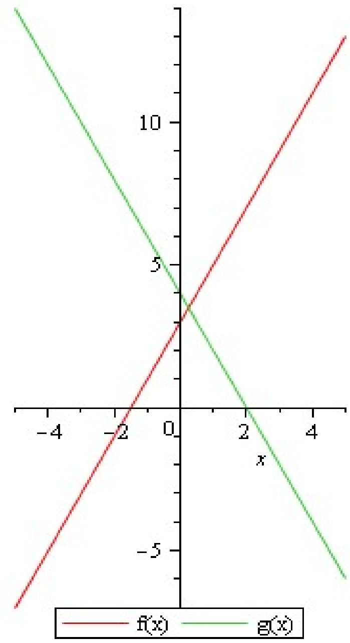
Monotonia

- Dacă $a>0$, funcția f este ***crescătoare***.

- Dacă $a<0$, funcția f este ***descrescătoare***.

$$f := x \to 2\,x + 3$$

$$g := x \to -2\,x + 4$$



Semnul funcției de gradul I

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)=ax+b$	Semnul opus lui a	0	Semnul lui a

Definiția 3. Se numește ***inecuație de gradul I*** orice expresie de forma $a\cdot x+b\geq 0,\quad a\cdot x+b>0,\quad a\cdot x+b\leq 0,\quad a\cdot x+b<0,\quad a,b\in\mathbb{R},\quad a\neq 0.$

Soluții:

Cazul 1. $a>0$

$$a\cdot x+b\geq 0\Rightarrow a\cdot x\geq -b\,\big|:a\Rightarrow x\geq -\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{b}{a},+\infty\right).$$

$$a\cdot x+b>0\Rightarrow a\cdot x>-b\,\big|:a\Rightarrow x>-\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{b}{a},+\infty\right).$$

$$a\cdot x+b\leq 0\Rightarrow a\cdot x\leq -b\,\big|:a\Rightarrow x\leq -\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right].$$

$$a\cdot x+b<0\Rightarrow a\cdot x<-b\,\big|:a\Rightarrow x<-\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right).$$

Cazul 2. $a<0$

$$a\cdot x+b\geq 0\Rightarrow a\cdot x\geq -b\Big|:(a<0)\Rightarrow x\leq -\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right].$$

$$a\cdot x+b>0\Rightarrow a\cdot x>-b\Big|:(a<0)\Rightarrow x<-\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{b}{a}\right).$$

$$a\cdot x+b\leq 0\Rightarrow a\cdot x\leq -b\Big|:(a<0)\Rightarrow x\geq -\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{b}{a},+\infty\right).$$

$$a\cdot x+b<0\Rightarrow a\cdot x<-b\Big|:(a<0)\Rightarrow x>-\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{b}{a},+\infty\right).$$

Funcția de gradul doi

Definiția 1. Se numește ***funcție de gradul II***, o funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,\quad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$.

Mulțimea $G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ /\ y=f(x)\}$ se numește ***graficul funcției*** *f*.

Definiția 2. Se numește ***ecuație de gradul II*** expresia de forma $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0,\quad a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$.

Forma canonică

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}\right)=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=$$

$$=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a},\quad \Delta=-b^2+4ac.$$

Rădăcinile ecuației de gradul II

$$a\cdot x^2+b\cdot x+c=0\Leftrightarrow a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}=0\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a},\quad \Delta\geq 0.$$

Reprezentarea grafică

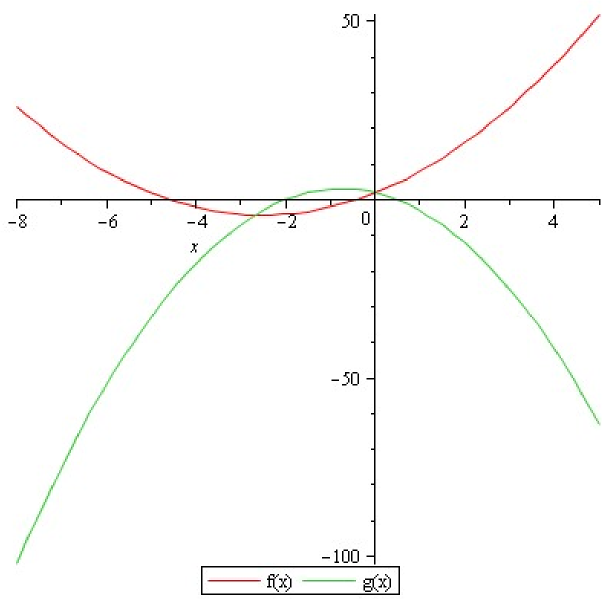
G_f este o ***parabolă*** , cu ***vârful*** în punctul $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Prin vârf trece ***axa de simetrie*** a parabolei.

- Dacă $a > 0$, vârful este un ***punct de minim***.
- Dacă $a < 0$, vârful este un ***punct de maxim***.

$f := x \to x^2 + 5x + 2$

$g := x \to -2x^2 - 3x + 2$



Semnul funcției de gradul II

Cazul 1. $\Delta > 0$

$(\exists)\, x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, rădăcini distincte ale ecuației de gradul doi.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui ***a***	0	semnul opus lui ***a***	0	semnul lui ***a***	

Cazul 2. $\Delta = 0$

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, rădăcină dublă a ecuației de gradul doi.

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui ***a***	0	semnul lui ***a***	

Cazul 3. $\Delta < 0$

Ecuația de gradul doi nu are rădăcini reale.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		semnul lui ***a***	

Relațiile lui Viete

Fie ecuația de gradul doi $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0,\quad a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, având rădăcinile reale x_1, x_2.

Atunci $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ și $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

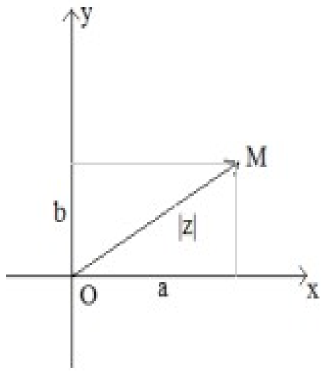
Numere complexe

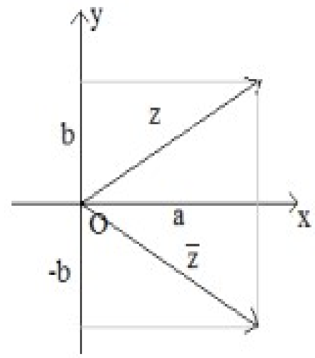
Definiția 1. Se numește ***forma algebrică*** a numărului complex *z*, expresia $z = x + \mathrm{i} \cdot y,\quad x, y \in \mathbb{R}$, în care $x = \operatorname{Re} z$ (***partea reală*** a lui *z*), $y = \operatorname{Im} z$ (***partea imaginară*** a lui *z*), iar $\mathrm{i}^2 = -1$.

Definiția 2. Se numește ***conjugatul*** lui $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, numărul complex $\overline{z} = x - \mathrm{i} \cdot y$.

Definiția 3. Se numește ***modulul*** lui $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, valoarea $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Reprezentarea unui număr complex





Proprietăți:

i) $(\forall) z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| \geq 0.$

ii) $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$

iii) $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_2 \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$

iv) $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$

v) $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2.$

vi) $(\forall) z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2.$

vii) $(\forall) z \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{\overline{z}} = z.$

viii) $(\forall) z \in \mathbb{C} \Rightarrow |z|^2 = z \cdot \overline{z}.$

Rezolvarea ecuației de gradul doi în $\mathbb{C}$

$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, pentru care $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Atunci rădăcinile ecuației vor fi $x_1 = \frac{-b + \mathrm{i} \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \mathrm{i} \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Se observă că $x_2 = \overline{x}_1$.